

A rendre pour le 20 Février 2019

Exercice 1 - Étude de fonction et suites

On souhaite déterminer le nombre de solutions de $(E) : x^3 - 3x + 1 = 0$ ainsi que la valeur approchée d'une des racines.

1. On note f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f : x \rightarrow x^3 - 3x + 1$. Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} (c'est un polynôme) et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

On trace son tableau de variation

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+
Variations de f	$-\infty$	↗ 3	↘ -1	↗ $+\infty$	

On a alors :

- La fonction f est continue sur $] -\infty; -1[$.
 - La fonction f est strictement croissante sur $] -\infty; -1[$.
 - $f(] -\infty; -1[) =] -\infty; 3[$ et $0 \in] -\infty; 3[$.
- D'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel $\alpha < -1$ tel que $f(\alpha) = 0$.

De la même façon,

- La fonction f est continue sur $] -1; 1[$.
 - La fonction f est strictement décroissante sur $] -1; 1[$.
 - $f(] -1; 1[) =] -1; 3[$ et $0 \in] -1; 3[$.
- D'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel $-1 < \beta < 1$ tel que $f(\beta) = 0$.

- La fonction f est continue sur $]1; +\infty[$.
- La fonction f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.
- $f(]1; +\infty[) =] -1; +\infty[$ et $0 \in] -1; +\infty[$.

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel $1 < \gamma$ tel que $f(\gamma) = 0$.

Ainsi, l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet 3 solutions α, β, γ vérifiant $\alpha < -1 < \beta < 1 < \gamma$.

2. On veut obtenir une approximation de β . On introduit $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{x^3 + 1}{3}$ et la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$.

- (a) On a $f(0) = 1$ et $f(1/2) = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{8}$. Ainsi, d'après le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires,

$\beta \in [0, 1/2]$. Enfin,

$$g(x) = x \iff x^3 + 1 = 3x \iff f(x) = 0$$

(b) La fonction g est dérivable sur $[0, 1/2]$ et

$$\forall x \in [0, 1/2], \quad g'(x) = x^2 \geq 0$$

La fonction g est croissante et $g(0) = \frac{1}{3}$ et $g(1/2) = \frac{3}{8}$ donc $g([0, 1/2]) = [1/3, 3/8] \subset [0, 1/2]$.

L'ensemble $[0, 1/2]$ est stable par g .

De plus $\forall x \in [0, 1/2], x^2 \in [0, 1/4]$, et donc

$$\forall x \in [0, 1/2], \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{4}.$$

(c) On montre les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \{u_n \in [0, 1/2]\}$.

— **Initialisation** : $u_0 = 0$ donc la propriété \mathcal{P}_0 est vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . On a donc $u_n \in [0, 1/2]$ et

$$u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 1/2]$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1/2]$.

(d) On sait que

— La fonction f est dérivable sur $[0, 1/2]$

— Pour tout $x \in [0, 1/2], |g'(x)| \leq \frac{1}{4}$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1/2]$ et $\beta \in [0, 1/2]$.

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$$

On montre par récurrence les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \left\{ |u_n - \beta| \leq \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2} \right\}$.

— **Initialisation** : $u_0 = 0, \beta \in [0, 1/2]$ donc $|u_0 - \beta| \leq \frac{1}{2}$ et la propriété \mathcal{P}_0 est vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . On a donc

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \beta| &\leq \frac{1}{4}|u_n - \beta| \\ &\leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2} \\ &\leq \frac{1}{4^{n+1}} \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - \beta| \leq \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2}$.

(e) On résout l'équation

$$\begin{aligned} \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2} &\leq 10^{-9} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4^n} &\leq 2 \times 10^{-9} \\ \Leftrightarrow 4^n &\geq \frac{10^9}{2} \\ \Leftrightarrow n \ln(4) &\geq \ln\left(\frac{10^9}{2}\right) \\ \Leftrightarrow n &\geq \frac{\ln\left(\frac{10^9}{2}\right)}{\ln(4)} \end{aligned}$$

On a la relation $|u_n - \beta| \leq 10^{-9}$ pour

$$n = E\left(\frac{\ln\left(\frac{10^9}{2}\right)}{\ln(4)}\right) + 1$$

où E représente la fonction partie entière.

(f) Programme Scilab :

```
function y = g(x)
    y = (x^3 + 1)/3
endfunction
```

```
n = floor(log(2 * 10^(-9)) / (-log(4))) + 1
u = 0
for k=1:n
    u = g(u)
end
```

```
disp('La solution obtenue par la méthode de l''exercice est x = ' + string(u) + '). C
disp(" ")
```

Exercice 2 - Étude de fonction et suites

1. Montrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe bien et est strictement positif. Tout d'abord u_0 est bien défini et, par définition, $u_0 > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que u_n existe et que $u_n > 0$.

u_n étant non nul, $\frac{a}{u_n}$ est bien défini donc u_{n+1} existe bien. De plus $u_n > 0$ et $a > 0$ donc $\frac{a}{u_n} > 0$ et

$u_n + \frac{a}{u_n} > 0$ d'où $u_{n+1} > 0$.

On peut alors affirmer, d'après le principe de récurrence, que

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe bien et est strictement positif.

2. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{x^2}\right)$. Ainsi, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) \geq 0 \iff 1 \geq \frac{a}{x^2} \iff x^2 \geq a \iff x \geq \sqrt{a} \text{ (car } x > 0 \text{ et } a > 0)$$

f est décroissante sur $]0, \sqrt{a}[$ et croissante sur $[\sqrt{a}, +\infty[$ donc, pour tout $x > 0$, $f(x) \geq f(\sqrt{a})$. Or

$$f(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a} + \frac{a}{\sqrt{a}} \right) = \frac{1}{2} (2\sqrt{a}) = \sqrt{a}.$$

$$\boxed{\forall x > 0, f(x) \geq \sqrt{a}.}$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(u_n) = f(u_{n-1})$. Or $u_{n-1} > 0$ d'après la question (1) donc la question (2) nous permet d'affirmer que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \sqrt{a}.}$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right) - u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{u_n} - u_n \right) = \frac{1}{2} \frac{a - u_n^2}{u_n}.$$

Or $n \in \mathbb{N}^*$ d'où $u_n \geq \sqrt{a}$ et $u_n^2 \geq a$. On en déduit, puisque $u_n > 0$, que $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

$$\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante à partir du rang 1.}}$$

- (c) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par \sqrt{a} donc, d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell \geq \sqrt{a}$. Ainsi

$$\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \ell \geq \sqrt{a}.}$$

- (d) f est continue sur $[\sqrt{a}, +\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ donc $\ell = f(\ell)$. On a donc

$$\ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{a}{\ell} \right) \iff \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\ell} - \ell \right) = 0 \iff \frac{1}{2} \frac{a - \ell^2}{\ell} = 0 \iff \ell^2 = a \iff \ell = \sqrt{a} \text{ car } \ell \geq \sqrt{a} \geq 0.$$

$$\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \sqrt{a}.}$$

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right) - \sqrt{a}}{\frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right) + \sqrt{a}} = \frac{u_n + \frac{a}{u_n} - 2\sqrt{a}}{u_n + \frac{a}{u_n} + 2\sqrt{a}} = \frac{u_n^2 + a - 2\sqrt{a}u_n}{u_n^2 + a + 2\sqrt{a}u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{(u_n + \sqrt{a})^2}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \left(\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} \right)^2.}$$

- (b) Montrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} = \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} \right)^{2^n}.$$

Tout d'abord, on a bien

$$\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} \right)^{2^0} = \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} \right)^1 = \frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que

$$\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} = \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} \right)^{2^n}.$$

Alors, d'après la question (4)(a),

$$\frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \left(\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} \right)^2 = \left(\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} \right)^{2^n} \right)^2 = \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} \right)^{2 \times 2^n} = \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} \right)^{2^{n+1}}$$

donc l'égalité reste vraie au rang $n + 1$.

D'après le principe de récurrence, on peut ainsi affirmer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} = \left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} \right)^{2^n}.$$

Exercice 3 - Probabilités

Deux personnes P_1 et P_2 ont rendez-vous dans un complexe formé de cinq sites S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5 , disposés en pentagone et reliés par des routes, commel'illustre le schéma ci-contre. Ils arrivent au rendez-vous à l'heure prévue, mais suite à un malentendu, P_1 se présente au site S_1 et P_2 au site S_2 . Ils décident alors de partir à la recherche l'un de l'autre. Ils empruntent les différentes routes du complexe, avec les règles suivantes :

- à partir d'un site, chacun choisit de se rendre sur l'un des deux sites voisins, les deux possibilités étant équiprobables ;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément ;
- tous les choix de déplacement se font indépendamment les uns des autres.

Ils continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes). Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus.

A. Modélisation du problème

Pour tout entier naturel n , on définit les trois événements A_n, B_n, C_n :

- A_n : « les deux personnes sont sur le même site après le n -ième déplacement »
- B_n : « les deux personnes sont sur des sites adjacents après le n -ième déplacement »
- C_n : « les deux personnes sont à deux routes de distance après le n -ième déplacement »

On note a_n, b_n, c_n les probabilités des événements A_n, B_n, C_n .

1. La distance maximale entre deux sites est de deux routes ;
Donc A_n, B_n, C_n sont les seuls possibles.
Comme ils sont de plus incompatibles,
Conclusion : ils forment un système complet d'événements.
2. A l'instant 0, ils sont à une route de distance donc
Conclusion : $a_0 = 0, b_0 = 1, c_0 = 0$
3. (a) Si les deux sont à deux routes de distance, ils se retrouvent sur le même site à condition qu'ils se dirigent tout deux dans la direction qui les rapproche.
Chacun le fait avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ donc *Conclusion* : $P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$.
- (b) S'ils sont tous les deux sur le même site, ils ne bougent plus, donc ils restent ensemble.
Conclusion : $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$

(c) Pour cette même raison : $P_{A_n}(B_{n+1}) = 0$; $P_{A_n}(C_{n+1}) = 0$

$P_{B_n}(A_{n+1}) = 0$ (quand ils sont à une route de distance, car ils se croisent ou ils s'éloignent)

$P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{3}{4}$ (ils se déplacent tous deux dans le même sens ; horaire avec une probabilité $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ou antihoraire, ou ils se croisent)

$P_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{4}$ (ils se fuient)

$P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$ (dans le sens opposé qui les réunit)

$P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}$ (dans le sens opposé qui les rapproche)

$P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{2}$ (ils se déplacent tous deux dans le même sens)

4. (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements donc

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n)$$

Donc $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}c_n$ et de même

$$\text{pour tout entier } n \in \mathbb{N} : \begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{cases}$$

N.B. Vérifier la cohérence ! On doit avoir $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = 1$

5. (a) On a alors

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}c_{n+1} \\ &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n\right) \\ &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{8}c_n \end{aligned}$$

et comme $b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$ on a $c_n = 4b_{n+1} - 3b_n$ et donc

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{8}(4b_{n+1} - 3b_n) \\ &= \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n \end{aligned}$$

(b) La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants.

Son équation caractéristique est $r^2 - \frac{5}{4}r + \frac{5}{16} = 0$ de discriminant $\Delta = \frac{25}{16} - \frac{20}{16} = \frac{5}{16}$ et donc de

racines $\alpha = \frac{\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}}{2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$ et $\beta = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$

Donc pour tout entier n : $b_n = A\alpha^n + B\beta^n$ avec A et B solutions de

$$\begin{cases} b_0 = 1 = A + B \\ b_1 = \frac{3}{4} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}A + \frac{5 + \sqrt{5}}{8}B \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} B = 1 - A \\ -\frac{2\sqrt{5}}{8}A = \frac{3}{4} - \frac{5 + \sqrt{5}}{8} = \frac{1 - \sqrt{5}}{8} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} B = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \\ A = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \end{cases}$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{b_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{8}\right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{8}\right)^n = \frac{4}{5}(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})}$$

(c) Et comme $c_n = 4b_{n+1} - 3b_n$ on a alors :

$$\begin{aligned} c_n &= 4\frac{4}{5}(\alpha^{n+2} + \beta^{n+2}) - 3\frac{4}{5}(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) \\ &= \frac{4}{5}((4\alpha - 3)\alpha \cdot \alpha^n + (4\beta - 3)\beta \cdot \beta^{n+1}) \end{aligned}$$

avec .

$$\begin{aligned}(4\alpha - 3)\alpha &= \left(4\frac{5 - \sqrt{5}}{8} - 3\right)\frac{5 - \sqrt{5}}{8} \\ &= -\frac{1}{4}\sqrt{5} \\ (4\beta - 3)\beta &= \left(4\frac{5 + \sqrt{5}}{8} - 3\right)\frac{5 + \sqrt{5}}{8} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{5}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{c_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n)}$

6. (a) Comme (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements, $a_n + b_n + c_n = 1$ et

$$\begin{aligned}a_n &= 1 - b_n - c_n \\ &= 1 - \frac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n) - \frac{4}{5}(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) \\ &= 1 - \alpha^n\left(-\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{4}{5}\alpha\right) - \beta^n\left(\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{4}{5}\beta\right) \\ &= 1 - \alpha^n\left(-\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{5 - \sqrt{5}}{10}\right) - \beta^n\left(\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{5 + \sqrt{5}}{10}\right)\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{a_n = 1 - \alpha^n\frac{5-3\sqrt{5}}{10} - \beta^n\frac{5+3\sqrt{5}}{10}}$

(b) Et comme $|\alpha| < 1$ et $|\beta| < 1$ (car $2 < \sqrt{5} < 3$) alors $\alpha^n \rightarrow 0$ et $\beta^n \rightarrow 0$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1}$

(c) D'après la question précédente, la probabilité que deux personnes se retrouvent tend vers 1. Donc la probabilité que deux personnes ne se retrouvent jamais est nulle. Pourtant, cet évènement n'est pas impossible! Comment cela se fait-il? Réponse dans quelques semaines.

Conclusion : $\boxed{\text{Les deux personnes se retrouveront presque sûrement.}}$